Erwartetes Grundwissen und Rechenfertigkeiten bei hilfsmittelfreien Prüfungen

Vorbemerkung: Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern soll vielmehr einen Überblick über das Grundwissen und die Rechenfertigkeiten vermitteln, welche erwartet werden, wenn in Prüfungen die Verwendung von Hilfsmitteln ausgeschlossen wird. Es handelt sich hier also um kein Blatt anhand dessen man die dargestellten Inhalte lernen kann, sondern um eine Erinnerung an das, was man können sollte. Die Beispiele dienen zur Illustration des zu erwartenden Schwierigkeitsgrades. Selbstverständlich werden die dargestellten Inhalte erst im Laufe der Jahre erworben und damit prüfbar.

Rechnen ohne Taschenrechner:

Beispiele:

Grundrechenarten:
Vorzeichenregeln: „Minus mal Minus ist Plus"…
Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich (KlaPPS)
Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a \qquad a + b = b + a$
Distributivgesetz: $b \cdot a \pm b \cdot c = b \cdot (a \pm c)$

$-3 - 5 = -8; \quad -12 + 8 = -4; \quad 5 - (2 - 6) = 5 - (-4) = 5 + 4 = 9$
$-3 \cdot (-5) = 15; \quad -3 \cdot 4 = 3 \cdot (-4) = -12; \quad 12 : (-4) = -12 : 4 = -3$
$13 - 13 : (5 - 2 \cdot 3^2) = 13 - 13 : (5 - 18) = 13 - 13 : (-13) = 14$
$25 \cdot 17 \cdot 4 = 25 \cdot 4 \cdot 17 = 100 \cdot 17 = 1700$
$17 \cdot 13 + 17 \cdot 87 = 17 \cdot (13 + 87) = 17 \cdot 100 = 1700$

Bruchrechnung: Erweitern und Kürzen
Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}; \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{21}; \quad \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{10} : \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{4}; \quad \frac{5}{7} : 4 = \frac{5}{7 \cdot 4}$

Dezimalbruchrechnung:
Umwandeln und Rechnen

$0{,}07 = 7/100 \qquad 5/6 = 5 : 6 = 0{,}8\overline{3}$
$20 \cdot 0{,}6 = 2 \cdot 6 = 12 \qquad 0{,}8 : 0{,}04 = 80 : 4 = 20$

Prozentrechnung:
Wachstumsfaktor; Abnahmefaktor

Zunahme um 10% $\widehat{=} \cdot 1{,}1$ Abnahme um 10% $\widehat{=} \cdot 0{,}9$
Der Preis von 180€ steigt um 10%. Neuer Preis: $180€ \cdot 1{,}1 = 198€$

Spezielle Werte: $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$ $\quad \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} \approx 33{,}3\%$ $\quad \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} \approx 66{,}7\%$ $\quad \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$ $\quad \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$ $\quad \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$ $\quad \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Potenzen: $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^0 = 1 \qquad (a^x)^z = a^{x \cdot z}$
Gleiche Basis: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m = a^{n-m}$
Gleicher Exponent: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; \quad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
Vorsicht: $(a + b)^n \neq a^n + b^n$
Speziell: Zehnerpotenzen und Quadratzahlen bis 20

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ und $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ *Vorsicht:* $(-3)^2 = 9$ *aber* $-3^2 = -9$
$5 \cdot 10^{-2} = 0{,}05; \quad 2^5 \cdot 2^{-8} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}; \quad 6 \cdot 10^6 : (2 \cdot 10^2) = \frac{6 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^2} = 3 \cdot 10^4$
$\frac{10^3}{3 \cdot 5^2} = \frac{5^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 5^2} = \frac{5^1 \cdot 2^3}{3} = \frac{5 \cdot 8}{3} = 13\frac{1}{3}; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$120\ Millionen = 12 \cdot 10^7$ oder $0{,}2mm = 2 \cdot 10^{-4} m; \qquad 225 = 15^2$

Wurzeln: $\sqrt{a}$ ($\sqrt[n]{a}$) ist diejenige positive Zahl, die quadriert (hoch n) a ergibt. Als Potenz: $\sqrt{a} = a^{1/2}$.
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
Vorsicht: $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
Spezielle Werte: Quadratzahlen bis 20

$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2} \qquad 24^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$
$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3 \cdot \sqrt{5} \qquad 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sqrt{169} = 13; \quad \sqrt{1} = 1; \quad \sqrt{0} = 0; \quad \sqrt[3]{5^3} = 5; \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Logarithmen: $\log_a b$ ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.
$\log_a(u^z) = z \cdot \log_a u$
$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
$\log_a(u : v) = \log_a u - \log_a v$
Spezielle Basen: $\ln a = \log_e a \qquad \lg a = \log_{10} a$
und spezielle Werte: $log_a 1 = 0; \ e^{\ln a} = a; \ \ln e^a = a$

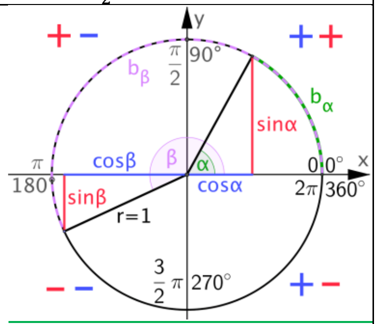
$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3; \quad \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1; \quad \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
$\log_2(2 \cdot \sqrt{2}) = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} = 1{,}5; \quad \log_2(2 \cdot \sqrt{2}) \neq \log_2 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$
$\lg 10 = 1; \ \lg 100 = 2; \ \lg 0{,}1 = -1; \ \ln e = 1; \ \ln e^2 = 2; \ \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}; \ \ln \frac{1}{e} = -1$
$\lg 1 = 0$ und $\ln 1 = 0; \quad e^{\ln 2} = 2; \quad \ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$

Trigonometrie: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
Rechnen mit π. Bsp.: $2\pi - \frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{2} + \cos \pi = \frac{7}{6}\pi - 1$

$\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Spezielle Werte für Grad- und Bogenmaß:	α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
	b	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π

Spezielle trigonometrische Werte:	sin 0°	sin 30°	sin 45°	sin 60°	sin 90°
	$\frac{1}{2}\sqrt{0}=0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$
	cos 90°	cos 60°	cos 45°	cos 30°	cos 0°



Jederzeit abrufbares Grundwissen: Beachte auch die allgemeinen Formeln von oben.

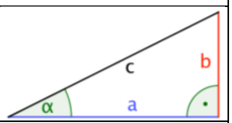
Geometrie: Grundbegriffe und Schreibweisen: Punkt P, Strecke $\overline{AB}$, Gerade g, Kreis, Winkel ∢, senkrecht ⊥, parallel ∥, Mittelsenkrechte …

Figuren- und Körperberechnungen: Grundbegriffe: Umfang U, Grundlinie g, Grundfläche G, Höhe h, Fläche A, Oberfläche O, Volumen V
$A_{Rechteck} = l \cdot b; \ A_{Quadrat} = a^2; \ A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h; \ A_{Trapez} = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h; \ U_{Rechteck} = 2a + 2b; \quad A_{Kreis} = \pi r^2; \quad U_{Kreis} = 2\pi r$
$V_{Quader} = l \cdot b \cdot h; V_{Würfel} = a^3; V_{Prisma} = G \cdot h; V_{Pyramide} = \frac{1}{3}Gh; V_{Zylinder} = \pi r^2 h; V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 h; V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3; O_{Kugel} = 4\pi r^2$

Einheitenumrechnung:
Fläche: Umrechnungszahl 10^2 $\quad (m^2 \to a \to ha \to km^2)$
Volumen: Umrechnungszahl 10^3 $\quad (1\ Liter = 1\ dm^3)$

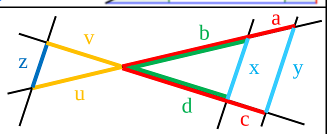
$2 \cdot 10^{-4} ha = 0{,}0002 ha = 0{,}02 a = 2 m^2 = 200 dm^2 = 20000 cm^2$
$10^{-9} km^3 = 0{,}000\ 000\ 001 km^3 = 1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000 \ell = 10^6 cm^3$

Dreiecke: Winkelsumme: 180°. Spezielle Dreiecke: gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck
Rechtwinkliges Dreieck: Seiten: Katheten und Hypotenuse; Thaleskreis; Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
Trigonometrie: $\sin \alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}; \quad \cos \alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}; \quad \tan \alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$



Strahlensätze und Ähnlichkeit: Ähnlichkeit bedeutet maßstabsgetreu. Ein Maßstab (Ähnlichkeitsfaktor) von **1**:**100** bedeutet, dass $1cm$ auf der Karte $100cm = 1m$ in der Wirklichkeit sind. Vorsicht: Flächen müssen dann mit $\mathbf{100^2}$ und Volumen mit $\mathbf{100^3}$ umgerechnet werden.

V- und X-Figur: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{u}{v}$
(*nur für* $x \parallel y \parallel z$)
F- und Z-Figur: $\frac{y}{a} = \frac{x}{b} = \frac{z}{u}$



Terme: Terme zusammenfassen. Beispiel: $(ab)^2 + (a+b)^2 - a(ab^2 + a) = a^2b^2 + a^2 + 2ab + b^2 - a^2b^2 - a^2 = 2ab + b^2$

Ein Minus ausklammern. Beispiel: $3 - x = -(x - 3)$

Binome: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Bruchterme: $\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} \pm \frac{a}{ab} = \frac{b \pm a}{ab}$

$\sqrt{a}^2 = a$; aber: $\sqrt{a^2} = |a|$

Gleichungen: Beachte die Anzahl der Lösungen. Das Lösen von Gleichungen wird benötigt zur Berechnung von Nullstellen, Schnittpunkten…

Lineare Gleichungen und **Gleichungssysteme:** $2(x-5) = 2 - x \Rightarrow x = 4$; $\{2y = 2x - 2 \wedge y = 2x - 4\} \Rightarrow x = 3 \wedge y = 2$

Bruchgleichungen: Mit Hauptnenner multiplizieren! $\frac{2}{x} - 3 = 7 \Longrightarrow x = 0{,}2$; $\frac{5}{x-3} = x - 2 \Leftrightarrow 5 = x \cdot (x-3) - 2 \cdot (x-3)$

Quadratische Gleichungen: Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$2x^2 - 6x + 3 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$; $\underbrace{(x-2)\cdot(4+x) = 0}_{\text{Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor Null ist.}} \Longrightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = -4$

Ausklammern: $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 3$

Exponentialgleichungen: $3^x = 5 \Rightarrow x = \log_3 5$; Ab Jahrgangsstufe 11: $e^x = 8 \Rightarrow x = \ln 8$

Trigonometrische Gleichungen: $\sin(x+1) = 0 \Rightarrow x + 1 = k\pi \Longrightarrow x_k = k\pi - 1$

Grundfunktionen und deren Graphen: Allgemeine Begriffe: Definitionsmenge $\mathbb{D}$ (Nenner, Wurzel, Logarithmus) und Wertemenge $\mathbb{W}$.

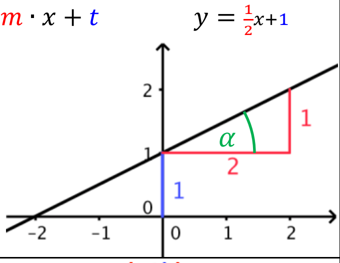
Lineare Funktionen: $f(x) = m \cdot x + t$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$m = \tan\alpha$

y-Achsenabschnitt: $t = f(0)$

$\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$



Quadratische Funktionen: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = \begin{cases} [e; \infty[\text{ für } a > 0 \\ ]-\infty; e] \text{ für } a < 0 \end{cases}$

Standardform: $f(x) = ax^2 + bx + c$

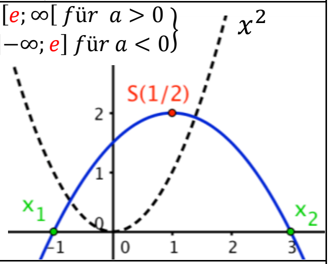
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

Nullstellenform: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-3)$

Scheitelform: $f(x) = a(x - d)^2 + e$

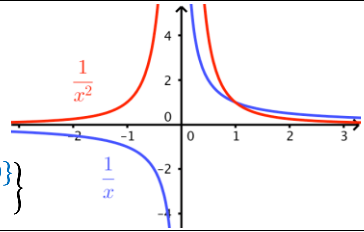
$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$



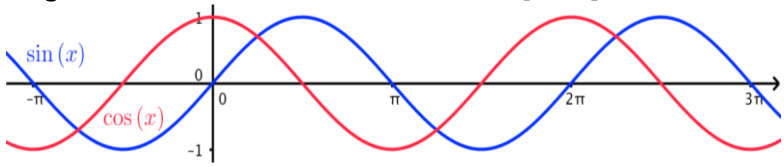
Gebrochen-rationale Funktionen:

Die Koordinatenachsen sind Asymptoten.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{W} = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \mathbb{R}^+ \end{cases}$

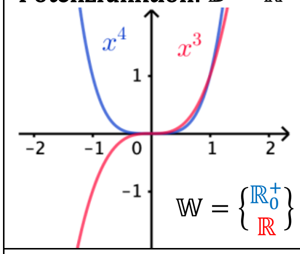


Trigonometrische Funktionen: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = [-1; 1]$; Periode: 2π



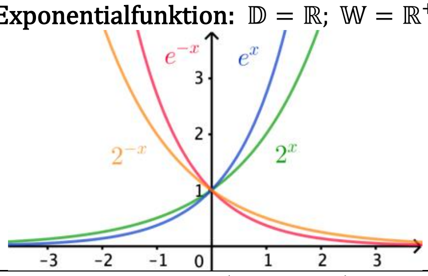
Symmetrie: $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$

Potenzfunktion: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

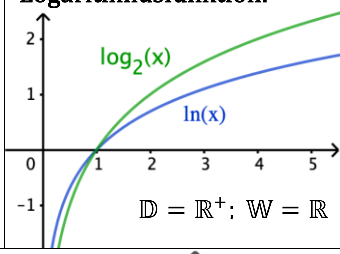


$\mathbb{W} = \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ \\ \mathbb{R} \end{cases}$

Exponentialfunktion: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$



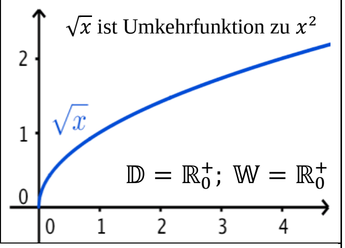
Logarithmusfunktion:



$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$; $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

Wurzelfunktion:

$\sqrt{x}$ ist Umkehrfunktion zu x^2

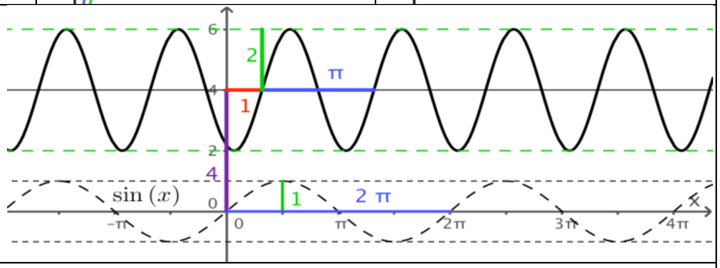


$\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$; $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

Transformationen von Funktionen: $g(x) = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d$

- a: Streckung/ Stauchung in y-Richtung
- b: Stauchung/ Streckung in x-Richtung
- c: Verschiebung in x-Richtung
- d: Verschiebung in y-Richtung

Beispiel: $f(x) = \sin x \Longrightarrow g(x) = 2 \cdot \sin(2 \cdot (x - 1)) + 4$



Wahrscheinlichkeitsrechnung: Grundbegriffe: arithmetisches Mittel, Median, Ergebnis ω, Ergebnisraum Ω, Ereignis E, Gegenereignis $\bar{E}$…

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Zählprinzip/ Kombinatorik

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\textit{Anzahl aller gleichwahrscheinlichen Ergebnisse}}$$

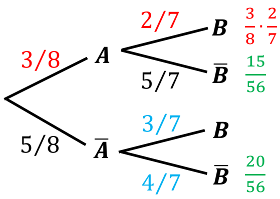
Beispiel: Urne mit 5 roten und 3 blauen Kugeln. Ziehen zweier Kugeln nacheinander und ohne zurücklegen. E: *"beide blau"*.

Trick: Kugeln durch Nummerieren unterscheidbar machen.

Damit: $|E| = 3 \cdot 2$ und $|\Omega| = 8 \cdot 7$. Also: $P(E) = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \frac{3}{28}$.

Mehrstufige Zufallsexperimente: Pfadregeln I bis III

Beispiel für **2 Stufen**: Urne mit 5 roten und 3 blauen Kugeln. Ziehen **zweier Kugeln nacheinander** und ohne zurücklegen.



A: *„Erster Zug ist eine blaue Kugel."*

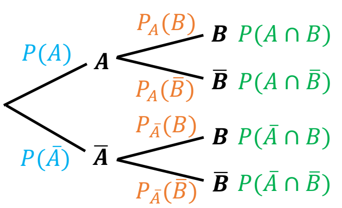
B: *„Zweiter Zug ist eine blaue Kugel."*

I. Produktregel: $P(A \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

II. Verzweigungsregel: $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$

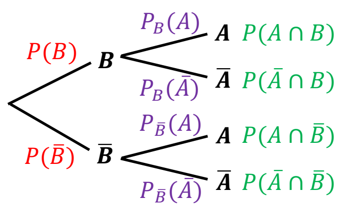
III. Summenregel: $P(\bar{B}) = \frac{15}{56} + \frac{20}{56} = \frac{35}{56}$

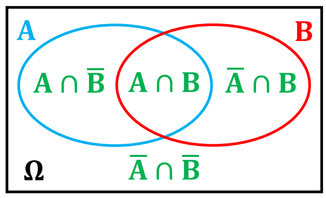
Zwei verknüpfte Ereignisse A und B: 4-Felder-Tafel, bedingte Wahrscheinlichkeit und $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ und $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$





Zwei Ereignisse heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ bzw. $P_B(A) = P(A)$ oder $P_A(B) = P(B)$.